

$$\frac{dc}{dt} = q u_c - q n - Y V_{max} \left(\frac{n}{K_n + n} \right) \left(\frac{c}{K_c + c} \right)$$

$$0 = q u_c - q n - Y V_{max} \left(\frac{n}{K_n + n} \right) \left(\frac{c}{K_c + c} \right)$$

$$-q u_c + q n = -Y V_{max} \left(\frac{n}{K_n + n} \right) \left(\frac{c}{K_c + c} \right)$$

$$\frac{(-q u_c + q n)}{\left(\frac{-Y V_{max} n}{K_n + n} \right)} = \frac{c}{K_c + c}$$

$$\frac{(K_n + n)(-q u_c + q n)}{(-Y V_{max} n)} = \frac{c}{K_c + c}$$

$$\frac{(-K_n q u_c) + (K_n q n)}{(-Y V_{max} n)} - \frac{(q u_c) + (q n)}{(-Y V_{max})} = \frac{c}{K_c + c}$$

$$K_c + c \times \frac{(K_n q u_c)}{(Y V_{max} n)} - \frac{(K_n q)}{(-Y V_{max})} + \frac{(q u_c)}{(Y V_{max})} - \frac{(q n)}{(Y V_{max})} = \frac{c}{K_c + c} \times K_c + c$$

$$\frac{(K_c K_n q u_c + c K_n q u_c)}{(Y V_{max} n)} - \frac{(K_n K_c q + K_n q c)}{(-Y V_{max})} + \frac{(K_c q u_c + c q u_c)}{(Y V_{max})} - \frac{(K_n q n + c q n)}{(Y V_{max})} = c$$

$$\frac{(K_c K_n g u_c)}{(Y V_{max} n)} + \frac{(c k_n g u_c)}{(Y V_{max} n)} - \frac{(k_n k_c g)}{(-Y V_{max})} + \frac{(k_n g c)}{(-Y V_{max})} + \frac{(K_c g u_c)}{(Y V_{max})} + \frac{(c g u_c)}{(Y V_{max})} - \frac{(K_c g n)}{(Y V_{max})} - \frac{(c g n)}{(Y V_{max})} = C$$

$$\underbrace{\frac{(K_c K_n g u_c)}{(Y V_{max} n)} + \frac{(k_n k_c g)}{(-Y V_{max})} + \frac{(K_c g u_c)}{(Y V_{max})} - \frac{(K_c g n)}{(Y V_{max})}}_{II} = \frac{(c g n)}{(Y V_{max})} + \frac{(c k_n g u_c)}{(Y V_{max} n)} - \frac{(K_n g c)}{(-Y V_{max})} + \frac{(c g u_c)}{(Y V_{max})} + C$$

$$\frac{n((K_c K_n g u_c) + (k_n k_c g) + (K_c g u_c) - (K_c g n))}{(Y V_{max})} = C \left(\frac{(g n)}{(Y V_{max})} + \frac{(k_n g u_c)}{(Y V_{max} n)} + \frac{(k_n g)}{(Y V_{max})} + \frac{(g u_c)}{(Y V_{max})} + 1 \right)$$

$$\left(\frac{n}{Y V_{max}} \right) ((K_c K_n g u_c) + (k_n k_c g) + (K_c g u_c) - (K_c g n)) = C$$

$$\left(\frac{n}{Y V_{max}} \right) \left(\frac{(g n) + (k_n g u_c) + (k_n g n) + (g u_c)}{(Y V_{max})} \right)$$

$$\left(Y V_{max} \left(\frac{((K_c K_n g u_c) + (k_n k_c g) + (K_c g u_c) - (K_c g n))}{((g n) + (k_n g u_c) + (k_n g n) + (g u_c))} \right) \right) = C$$

$$\frac{dn}{dt} = q_u n - q_n - Y V_{max} \left(\frac{n}{K_n + n} \right) \left(\frac{C}{K_c + C} \right)$$

$$0 = q_u n - q_n - Y V_{max} \left(\frac{n}{K_n + n} \right) \left(\frac{C}{K_c + C} \right)$$

$$\left(\frac{1}{\left(\frac{n}{K_n + n} \right)} \right) q_n - q_u n = -Y V_{max} \left(\frac{n}{K_n + n} \right) \left(\frac{C}{K_c + C} \right) \times \frac{1}{\left(\frac{n}{K_n + n} \right)}$$

$$\frac{(q_n - q_u n)}{\left(\frac{n}{K_n + n} \right)} = -Y V_{max} \left(\frac{C}{K_c + C} \right)$$

$$\frac{(K_n + n)(q_n - q_u n)}{n} = -Y V_{max} \left(\frac{C}{K_c + C} \right)$$

$$\frac{(K_n q_n) - (q_u n K_n) + (n q_n) - (q_u n n)}{n} = -Y V_{max} \left(\frac{C}{K_c + C} \right)$$

$$K_n q - \frac{(q_u n K_n)}{n} + q_n - q_u n = -Y V_{max} \left(\frac{C}{K_c + C} \right)$$

$$-\frac{(q_u n K_n)}{n} + q_n = q_u n - K_n q - Y V_{max} \left(\frac{C}{K_c + C} \right)$$

$$-(q_u n K_n) + q_n^2 = (n q_u n) - (K_n q_n) - (n Y V_{max} \left(\frac{C}{K_c + C} \right))$$

$$q_n^2 = \left((q_u n K_n) + (q_u n) - (K_n q) - (Y V_{max} \left(\frac{C}{K_c + C} \right)) \right)$$

$$n = \frac{((q_u k_n) + (q_u) - (k_n q) - (y v_{max} (\frac{c}{K_{etc}})))}{q_0}$$